

Тема. Розв'язування нерівностей з параметрами у шкільному курсі математики при підготовці учнів до ЗНО 2019 р.

Задача №33. Основна сесія 2018 року.

Розв'яжіть нерівність $\frac{\log_a x}{x^2+(a-4)x+4-2a} \leq 0$ залежно від значень параметра a .

Розв'язання:

$$\frac{\log_a x}{x^2+(a-4)x+4-2a} \leq 0 \quad (1)$$

Знайдемо ОДЗ:

$$\begin{cases} a > 0, & (2) \\ a \neq 1, & (3) \\ x > 0, & (4) \\ x^2 + (a - 4)x + 4 - 2a \neq 0 & (5) \end{cases}$$

$$\text{З (5) } x^2 + (a - 4)x + 4 - 2a \neq 0$$

$$D = (a - 4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (4 - 2a) = a^2 - 8a + 16 - 16 + 8a = a^2, \quad D > 0$$

$$x_1 = \frac{-(a - 4) + a}{2} = \frac{-a + 4 + a}{2} = 2;$$

$$x_2 = \frac{-(a - 4) - a}{2} = \frac{-a + 4 - a}{2} = \frac{4 - 2a}{2} = 2 - a.$$

$$\text{Нерівність можна записати: } \frac{\log_a x}{(x-2)(x-2+a)} \leq 0 \quad (6).$$

ОДЗ набуває вигляду:

$$\begin{cases} a \in (0; 1) \cup (1; \infty); & (7) \\ x \in (0; \infty); & (8) \\ x_1 \neq 2; & (9) \\ x_2 \neq 2 - a; & (10) \end{cases}$$

Нуль функції: $\log_a x = 0$;

$$x = a^0 = 1.$$

Нанесемо нулі функції та ОДЗ на координатну вісь. Розглянемо 7 випадків розташування кореня x_2 .

1 випадок

$$2 - a > 2;$$

$$-a > 2 - 2 \quad | \cdot (-1);$$

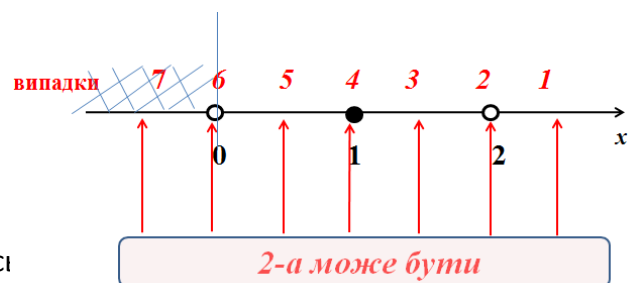
$a < 0$ – суперечить умові (7), не входить в ОДЗ;

2 випадок

$$2 - a = 2;$$

$$-a = 2 - 2;$$

$a = 0$ – суперечить умові (7), не входить в ОДЗ;



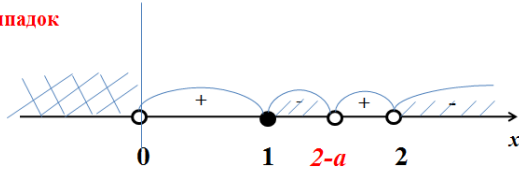
3 випадок

$$1 < 2 - a < 2 \quad | - 2;$$

$$-1 < -a < 0 \quad | \cdot (-1);$$

$0 < a < 1$, тоді визначимо знаки на проміжках за нерівністю (6):

3 випадок



$$x \in [1; 2 - a) \cup (2; \infty)$$

4 випадок

$$2 - a = 1;$$

$a = 1$ – суперечить умові (3), не входить в ОДЗ.

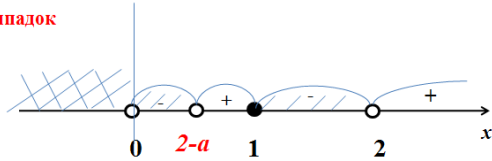
5 випадок

$$0 < 2 - a < 1 \quad | - 2;$$

$$-2 < -a < -1 \quad | \cdot (-1);$$

$1 < a < 2$, визначимо знаки на проміжках за нерівністю (6):

5 випадок



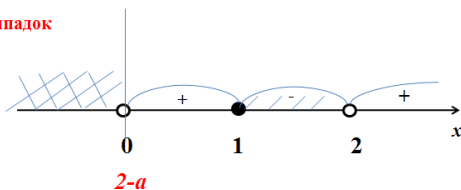
$$x \in (0; 2 - a) \cup [1; 2);$$

6 випадок

$$2 - a = 0;$$

$a = 2$, визначимо знаки на проміжках за нерівністю (6):

6 випадок



$$x \in [1; 2);$$

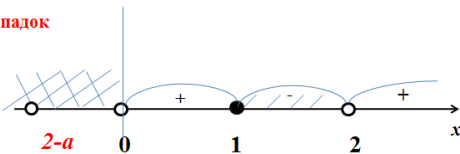
7 випадок

$$2 - a < 2;$$

$$-a < -2;$$

$a > 2$, визначимо знаки на проміжках за нерівністю (6):

7 випадок



$$x \in [1; 2).$$

Відповідь:

якщо $a \in (0; 1)$, то $x \in [1; 2 - a) \cup (2; \infty)$;

якщо $a \in (1; 2)$, то $x \in (0; 2 - a) \cup [1; 2)$;

якщо $a \in [2; \infty]$, то $x \in [1; 2)$.