Сайт элементарной математики
Дмитрия Гущина
www.mathnet.spb.ru

Гущин Д. Д., Юрченко А. А.,
Санкт-Петербург

PISA:
разбор заданий международного исследования

Мы предлагаем вашему вниманию разбор заданий международного тестирования ПИЗА, проходившего в России в 2000, 2003 и 2006 годах. Очередное тестирование пройдет в российских школах через две-три недели, а результаты появятся примерно через год. Но уже сейчас ясно, что они будут неутешительными.

К сожалению, абсолютное большинство российских школьников особенно на средней ступени обучения тренируются учителями для заучивания материала, выполнения действий по образцу, реализации одно-двух-трёх шаговых алгоритмов.

Давно известно, что выполнение сколь угодно сложных алгоритмов не развивает творческих способностей учащихся, а в худшем исполнении, приводит к тому, что даже и повторить эти самые алгоритмы учащийся оказывается не в состоянии.

Именно это является причиной четверти неудовлетворительных оценок по математике, получаемых ежегодно при проведении единого государственного экзамена, это же является причиной более чем неудовлетворительных результатов тестирования "Пиза".

Анализируя наши неудачи мы зачастую путаем причину со следствием. Объясняя, например, плохие результаты школьников неудачными технологиями контроля. Понятно, однако, что продолжать оставаться на позиции «Наше образование — лучшее в мире, только в остальных странах об этом не знают», значит, уподобляться страусам.

Намеренно уходя сейчас от полемики на тему кто и чем может убедительно подтвердить, что 15 миллионов российских школьников получают лучшее на всей планете образование, предлагаем всем желающим познакомиться с теми заданиями, которые вызывают у наших девятиклассников серьёзные трудности.

Признаемся, что не все задачи были простыми и для нас самих : нашей целью было не столько приведение правильного ответа, но - в большей степени - предъявление достаточно полных и аргументированных рассуждений, зачастую отсутствующих в наших школьных учебниках, позволяющих ученику получить ответ на вопрос задачи. Там, где это казалось нам уместным, мы приводили несколько способов рассуждений, при необходимости комментировали задания.

Основной труд по решению задач взял на себя кандидат физико-математических наук, преподаватель физического факультета Санкт-Петербургского государственного университета А. А. Юрченко. Учитель Петергофской гимназии императора Александра II, преподаватель физфака СПбГУ и Смольного института свободных искусств и наук Д. Д. Гущин проверял и дополнял решения, редактировал и комментировал их, а также адаптировал научный текст к прочтению читателем-непрофессионалом.

Не будет преувеличением отметить, что нам было интересно работать над многими заданиями; размышления над некоторыми вызывали между нами живые дискуссии, к которым иногда привлекались и специалисты в соответствующих областях естествознания.

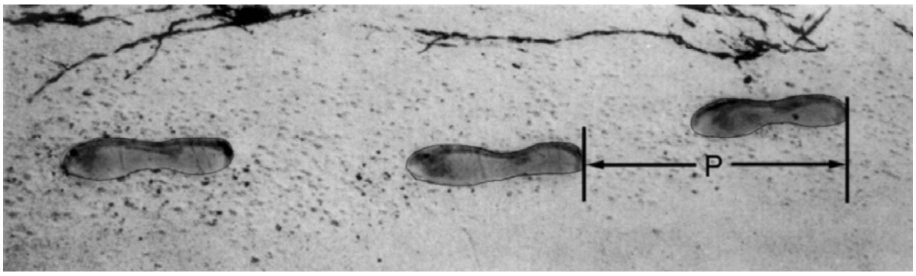
Мы желаем читателям интересного и полезного чтения, а российскому образованию - процветания. Только это подвигло нас на тот труд, который сейчас перед вами.

Авторы.

Международное исследование образовательных достижений учащихся PISA

Математическая грамотность

1. ПОХОДКА



На рисунке изображены следы идущего человека. Длина шага P — расстояние от конца пятки следа одной ноги до конца пятки следа другой ноги. Для походки мужчин зависимость между n и P приближенно выражается формулой $n/P = 140$, где n — число шагов в минуту, P — длина шага в метрах.

ВОПРОС 1.

Используя данную формулу, определите, чему равна длина шага Сергея, если он делает 70 шагов в минуту.

Решение. Из данной формулы получаем:

$$\frac{n}{P} = 140 \Leftrightarrow P = \frac{n}{140}.$$

По условию Сергей делает 70 шагов в минуту, значит, $n = 70$. Длина его шага (в метрах) равна

$$P = \frac{70}{140} = 0{,}5.$$

Ответ: 0,5 метров.

ВОПРОС 2.

Павел знает, что длина его шага равна 0,80 м. Используя данную выше формулу, вычислите скорость Павла при ходьбе в метрах в минуту (м/мин), а затем в километрах в час (км/ч).

Решение. Из данной формулы получаем:

$$\frac{n}{P} = 140 \Leftrightarrow n = 140P.$$

По условию длина шага Павла равна $P = 0{,}80$ м. За минуту он делает $n = 140 \cdot 0{,}80 = 112$ шагов. Значит, за минуту Павел проходит $112 \cdot 0{,}80 = 89{,}6$ метров. Скорость Павла равна

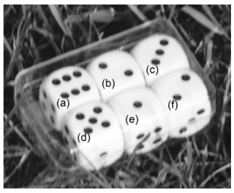
$$v = 89{,}6\,\frac{\text{м}}{\text{мин}} = 89{,}6\,\frac{\frac{1}{1000}\,\text{км}}{\frac{1}{60}\,\text{ч}} = 5{,}376\,\frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

Ответ: 89,6 м/мин; 5,376 км/ч.

2. КУБИКИ

ВОПРОС.

На фотографии видны 6 кубиков, обозначенных буквами от a до f. Для каждого из них выполняется следующее правило: сумма кружков, изображенных на двух любых противоположных гранях кубика, всегда равна семи. В каждой клетке таблицы запишите число кружков, которые изображены на нижней грани соответствующего кубика.



(a)	(b)	(c)
(d)	(e)	(f)

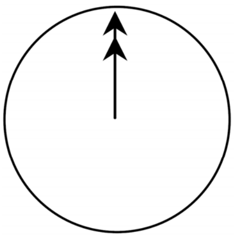
Решение. Нижняя грань противоположна верхней, значит, число кружков на ней можно определить, вычитая из семи число кружков на верхней грани. Получаем следующую таблицу:

(a)	(b)	(c)
1	5	4
2	6	5
(d)	(e)	(f)

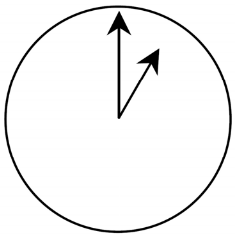
Ответ: см. таблицу.

3. ОБЩЕНИЕ В ИНТЕРНЕТЕ

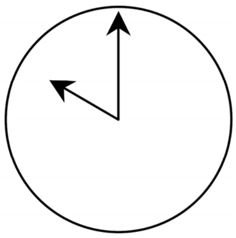
Марк (из Сиднея в Австралии) и Ганс (из Берлина в Германии) часто общаются друг с другом в Интернете. Им приходится выходить в Интернет в одно и то же время, чтобы они смогли поболтать. Чтобы определить удобное для общения время, Марк просмотрел таблицы, в которых дано время в различных частях мира, и нашел следующую информацию:



Гринвич 24:00 (полночь)



Берлин 1:00



Сидней 10:00

ВОПРОС 1.

Какое время в Берлине, если в Сиднее 19:00?

Решение. Из найденной Марком информации ясно, что сиднейское время на 9 часов опережает берлинское. Когда в Сиднее 19:00, в Берлине 10:00.

Ответ: 10:00.

ВОПРОС 2.

Марк и Ганс не могут общаться между 9:00 и 16:30 по их местному времени, так как они в это время должны находиться в школе. Они также не могут общаться с 23:00 до 7:00 по их местному времени, так как в это время они спят. Какое время было бы удобно для мальчиков, чтобы они могли поболтать? Укажите в таблице местное время для каждого города.

Город	Время
Сидней	
Берлин	

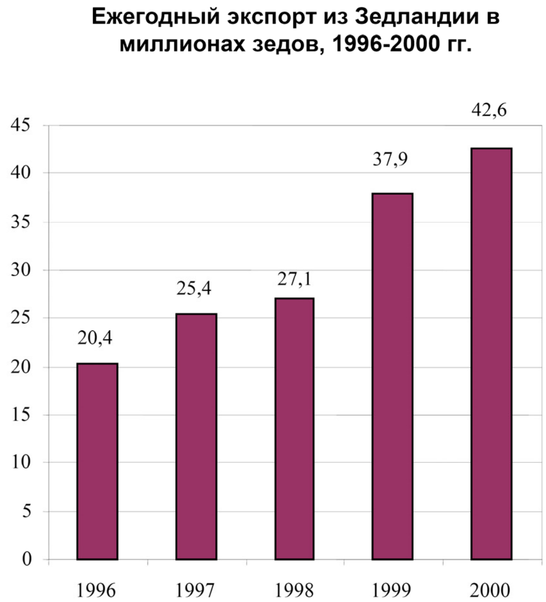
Решение. Марк имеет возможность общаться с 7:00 до 9:00 и с 16:30 до 23:00 по сиднейскому времени или с 22:00 до 24:00 и с 7:30 до 14:00 по берлинскому времени. С учётом возможностей Ганса получается, что они могут общаться с 22:00 до 23:00 и с 7:30 до 9:00 по берлинскому времени или с 7:00 до 8:00 и с 16:30 до 18:00 по сиднейскому времени:

Город	**Время**
Сидней	с 7:00 до 8:00, с 16:30 до 18:00
Берлин	с 22:00 до 23:00, с 7:30 до 9:00

Ответ: см. таблицу.

4. ЭКСПОРТ

На диаграммах представлена информация об экспорте из Зедландии — страны, в которой в качестве денежной единицы используют зед.



ВОПРОС 1.

Какова общая стоимость (в миллионах зедов) экспорта из Зедландии в 1998 г.?

Решение. Из столбчатой диаграммы видно, что в 1998 году общая стоимость экспорта из Зедландии составляла 27,1 миллионов зедов.

Ответ: 27,1 млн зедов.

ВОПРОС 2.

Какова стоимость фруктового сока, который экспортировали из Зедландии в 2000 г.?

A. 1,8 миллионов зедов
B. 2,3 миллионов зедов
C. 2,4 миллионов зедов
D. 3,4 миллионов зедов
E. 3,8 миллионов зедов

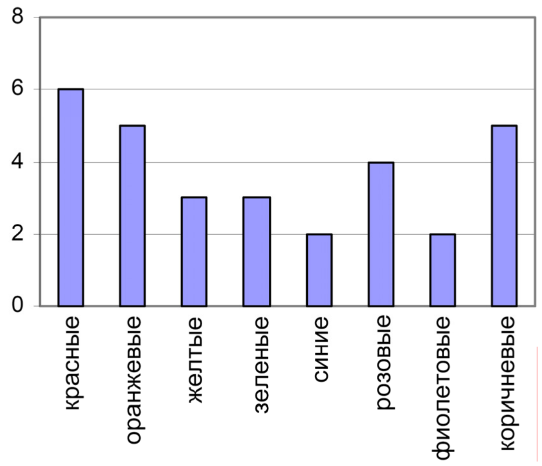
Решение. Из столбчатой диаграммы видно, что в 2000 году общая стоимость экспорта из Зедландии составляла 42,6 миллионов зедов. Из круговой диаграммы видно, что доля стоимости фруктового сока составляла 9 % или $42{,}6 \cdot 0{,}09 = 3{,}834 \approx 3{,}8$ миллионов зедов.

Правильный ответ: E.

5. ЦВЕТНЫЕ КОНФЕТЫ

ВОПРОС.

Мама Роберта разрешила ему вынуть из коробки одну конфету, не заглядывая в коробку. Число конфет различного цвета в коробке показано на диаграмме.



Какова вероятность того, что Роберт вынет красную конфету?

A. 10 % **B.** 20 % **C.** 25 % **D.** 50 %

Решение. Найдём число конфет в коробке по данным, приведённым на диаграмме: 6 + 5 + + 3 + 3 + 2 + 4 + 2 + 5 = 30 конфет и из них 6 красных. Вероятность вынуть красную конфету равна отношению числа красных конфет к общему числу конфет:

$$\frac{6}{30} = 0{,}2 = 20\ \% .$$

Правильный ответ: B.

6. ТЕСТЫ ПО ГЕОГРАФИИ

ВОПРОС.

У Игоря в школе учитель географии предлагает учащимся тесты и выполнение каждого из них оценивает из 100 баллов. Средняя оценка Игоря за четыре первых теста равна 60 баллам. По пятому тесту он получил 80 баллов. Чему равна средняя оценка Игоря за пять тестов по географии?

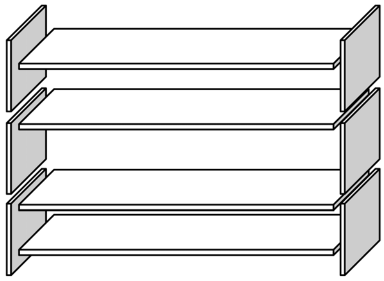
Решение. Поскольку средняя оценка Игоря за четыре первых теста равна 60 баллам, значит, за четыре первых теста он набрал в сумме $4 \cdot 60 = 240$ баллов. После пятого теста общее число баллов стало равно $240 + 80 = 320$. Средняя оценка Игоря за пять тестов равна $320 : 5 = 64$.

Ответ: 64.

7. КНИЖНЫЕ ПОЛКИ

ВОПРОС.

Чтобы собрать один комплект книжных полок, плотнику нужны следующие детали:



- 4 длинных деревянных панели,
- 6 коротких деревянных панелей,
- 12 маленьких скоб,
- 2 больших скобы и
- 14 шурупов.

У плотника есть 26 длинных деревянных панелей, 33 коротких панели, 200 маленьких скоб, 20 больших скоб и 510 шурупов. Какое наибольшее число комплектов книжных полок может собрать из этих деталей плотник?

Решение. Плотнику длинных деревянных панелей хватит на 6 комплектов книжных полок, коротких панелей — на 5, маленьких скоб — на 16, больших скоб — на 10, шурупов — на 36. Деталей хватит максимум на 5 комплектов книжных полок (для сборки шестого комплекта не хватит коротких панелей).

Ответ: 5.

8. ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЕ

ВОПРОС.

В документальном фильме рассказывалось о землетрясениях и о том, как часто они происходят. В фильме также была показана дискуссия о возможности предсказания землетрясений. Геолог утверждал: «Шансы на то, что в последующие 20 лет в городе Зеде произойдёт землетрясение, составляют два из трёх». Какое из следующих рассуждений правильно передаёт смысл утверждения геолога?

A. $\frac{2}{3}\cdot 20 = 13{,}3$ поэтому между 13 и 14 годами от настоящего момента в городе Зеде произойдёт землетрясение.

B. $\frac{2}{3}$ больше, чем $\frac{1}{2}$, поэтому можно быть уверенным, что когда-нибудь в течение 20 следующих лет в городе Зеде произойдёт землетрясение.

C. Вероятность того, что когда-нибудь в следующие 20 лет в городе Зеде произойдёт землетрясение, больше, чем вероятность того, что оно не произойдёт.

D. Невозможно сказать о том, что может случиться, потому что никто точно не знает, когда произойдёт землетрясение.

Решение. Правильно передаёт смысл утверждения геолога рассуждение C.

Правильный ответ: C.

9. ВЫБОР

ВОПРОС.

В пиццерии всегда можно получить пиццу с двумя обязательными начинками: сыром и помидорами. Но можно заказать пиццу по своему рецепту с дополнительными начинками. Вы можете выбрать из четырёх различных дополнительных начинок: оливок, ветчины, грибов и колбасы. Вера хочет заказать пиццу с двумя дополнительными начинками. Сколько у Веры вариантов выбора различных комбинаций из предлагаемых дополнительных начинок?

Решение.

1-*й способ.* Выпишем все возможные комбинации начинок. Вера может выбрать оливки с ветчиной, оливки с грибами, оливки с колбасой, ветчину с грибами, ветчину с колбасой или грибы с колбасой. Всего 6 различных комбинаций.

2-*й способ.* Первую дополнительную начинку Вера может выбрать четырьмя способами, вторую дополнительную начинку — тремя способами. Всего получается $4\cdot 3 = 12$ способов выбора пары начинок. Следует учесть, что выбор сначала начинки А, а затем начинки Б и выбор сначала начинки Б, а затем начинки А дают одну и ту же комбинацию дополнительных начинок. Значит, в 12 способах выбора пары начинок каждая комбинация начинок была учтена дважды. У Веры есть $12:2 = 6$ вариантов выбора различных комбинаций дополнительных начинок.

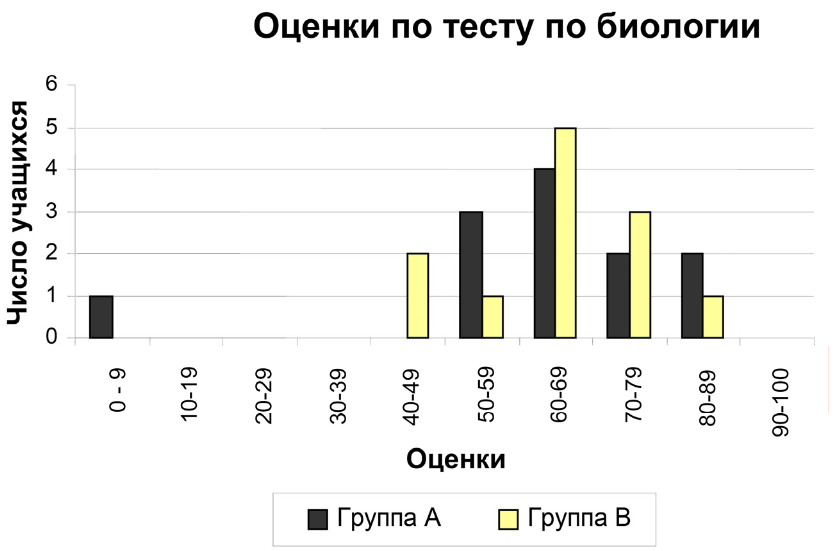
3-*й способ.* Выбрать две начинки из четырёх предложенных Вера может $C_4^2 = 6$ способами.

Ответ: 6.

10. ТЕСТОВЫЕ ОЦЕНКИ

ВОПРОС.

Ниже на столбчатой диаграмме представлены результаты выполнения теста по биологии группами учащихся, обозначенными как Группа A и Группа B. Средняя оценка группы A равна 62,0 и средняя оценка Группы B равна 64,5. Считается, что учащийся справился с тестом, если его оценка 50 или более баллов. Посмотрев на диаграмму, учительница сделала вывод о том, что Группа B выполнила тест лучше, чем Группа A.



Учащиеся Группы A не согласны с её мнением. Они стараются убедить учительницу в том, что учащиеся Группы B не обязательно выполнили тест лучше них. Используя диаграмму, приведите один математический довод, которым могли бы воспользоваться учащиеся Группы A.

Решение. Доводы могут быть следующие. 1) В группе A только один ученик не справился с тестом, а в группе B — двое (те, кто набрал менее 50 баллов). 2) В то же время число учеников, набравших более 80 баллов, в группе A — двое, а в группе B — только один. 3) Если не рассматривать самого слабого ученика, набравшего менее 10 баллов, то средний балл группы A будет больше среднего балла группы B.

Ответ: любой из приведённых доводов.

Примечание. Погрешность разницы в баллах достаточно велика для того, чтобы утверждать, что одна группа превзошла другую. Оценим стандартное отклонение средних баллов двух групп:

$$\sigma_A \geq \sqrt{\frac{(9-62)^2 + 3(59-62)^2 + 4(62-62)^2 + 2(70-62)^2 + 2(80-62)^2}{12}} \approx 17,$$

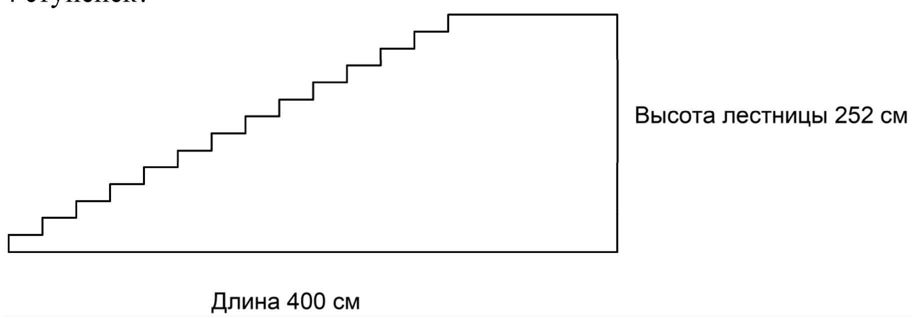
$$\sigma_B \geq \sqrt{\frac{2(49-64{,}5)^2 + (59-64{,}5)^2 + 5(64{,}5-64{,}5)^2 + 3(70-64{,}5)^2 + (80-64{,}5)^2}{12}} \approx 8{,}4.$$

Средний балл группы A равен 62 ± 17, средний балл группы B — $64{,}5 \pm 8{,}4$. В пределах погрешности результаты совпадают.

11. ЛЕСТНИЦА

ВОПРОС.

На рисунке изображена лестница с 14 ступеньками, высота которой 252 см. Какова высота каждой из 14 ступенек?



Решение. Поскольку высота лестницы 252 см, высота ступеньки равна $252:14=18$ см.

Ответ: 18.

12. ПОДДЕРЖКА ПРЕЗИДЕНТА

ВОПРОС.

В Зедландии проводился опрос населения, чтобы определить уровень поддержки президента на предстоящих выборах. Четыре газеты провели свои собственные опросы населения страны. Результаты этих опросов приведены ниже.

Газета 1: 36,5% (опрос проводился 6 января на случайной выборке из 500 граждан, имеющих право голосовать).

Газета 2: 41,0% (опрос проводился 20 января на случайной выборке из 500 граждан, имеющих право голосовать).

Газета 3: 39,0% (опрос проводился 20 января на случайной выборке из 1000 граждан, имеющих право голосовать).

Газета 4: 44,5% (опрос проводился 20 января, были опрошены 1000 людей, которые сами позвонили, чтобы проголосовать).

Результаты какой газеты лучше всего использовать для прогнозирования уровня поддержки президента, если выборы будут проводиться 25 января? Укажите две причины при обосновании вашего ответа.

Решение. Лучше всего использовать те результаты, которые получены: 1) как можно ближе к дню выборов; 2) при случайном выборе опрашиваемых; 3) число которых как можно больше; 4) и которые имеют право голосовать. Из перечисленных газет этим критериям удовлетворяет опрос, проведённый газетой 3.

Ответ: газета 3; любые две причины.

13. ЛУЧШИЙ АВТОМОБИЛЬ

Автомобильный журнал использует рейтинговую систему для оценки новых автомобилей и присваивает звание «Автомобиль года» автомобилю, получившему наивысшую общую оценку. Была проведена оценка пяти новых автомобилей, и их рейтинги представлены в таблице.

Автомобиль	**Обеспечение безопасности (*S*)**	**Экономия топлива (*F*)**	**Внешний вид (*E*)**	**Внутренние удобства (*T*)**
Ca	3	1	2	3
M2	2	2	2	2
Sp	3	1	3	2
N1	1	3	3	3
KK	3	2	3	2

Рейтинги означают следующее:

3 очка — превосходно;

2 очка — хорошо;

1 очко — неплохо.

ВОПРОС 1.

Для подсчёта общей оценки автомобиля журнал использует правило, по которому определяется взвешенная сумма всех очков, полученных автомобилем:

$$\text{Общая оценка} = 3 \cdot S + F + E + T.$$

Подсчитайте общую оценку автомобиля «Са».

Решение. Общая оценка автомобиля «Са» равна $3\cdot 3+1+2+3=15$.

Ответ: 15.

ВОПРОС 2.

Производитель автомобиля «Са» считает, что правило определения общей оценки несправедливо. Запишите такое правило подсчёта общей оценки, чтобы автомобиль «Са» стал победителем. Ваше правило должно включать все четыре величины, и его надо записать, вставив соответствующие положительные числа в четыре места, обозначенные точками в приведенном ниже выражении.

$$\text{Общая оценка} = \ldots \cdot S + \ldots \cdot F + \ldots \cdot E + \ldots \cdot T.$$

Решение. За обеспечение безопасности и внутренние удобства автомобиль «Са» получил наивысший балл, поэтому коэффициенты при S и T следует брать как можно больше. А за экономию топлива и внешний вид у автомобиля «Са» низкие оценки, коэффициенты при F и E следует брать как можно меньше. Например, правило подсчёта может быть таким:

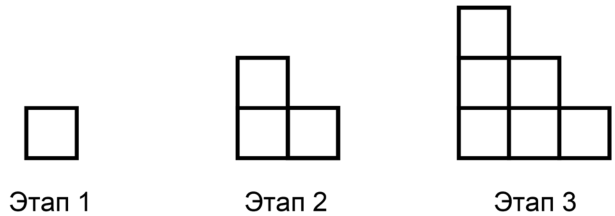
$$\text{Общая оценка} = 3 \cdot S + 1 \cdot F + 1 \cdot E + 3 \cdot T.$$

Ответ: например, общая оценка = $3 \cdot S + 1 \cdot F + 1 \cdot E + 3 \cdot T$.

14. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ «ЛЕСЕНОК»

ВОПРОС.

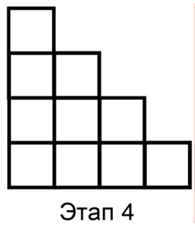
Роберт рисует последовательность «лесенок», сложенных из квадратов. Ниже показаны этапы построения.



Видно, что на этапе 1 он использовал один квадрат, на этапе 2 — три квадрата и на этапе 3 — шесть квадратов. Сколько квадратов он использует на чётвертом этапе?

Решение. На чётвертом этапе к шести квадратам, имеющимся после третьего этапа, добавится ещё четыре, итого их станет десять.

Проще можно нарисовать «лесенку», образующуюся на четвёртом этапе (см. рисунок). Подсчёт квадратов показывает, что их десять.



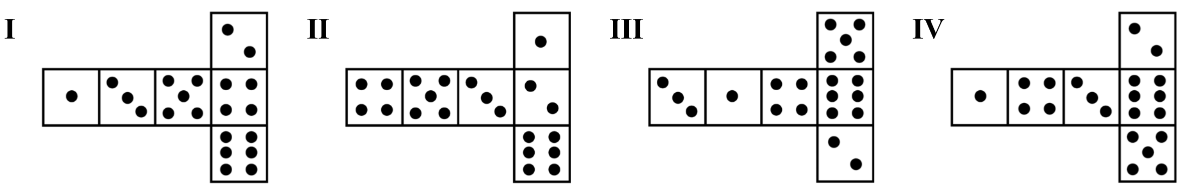
Ответ: 10.

15. ИГРАЛЬНЫЕ КУБИКИ

Справа изображены два игральных кубика. Для игральных кубиков выполняется следующее правило: сумма очков, изображённых на двух любых противоположных сторонах кубика, равна семи.

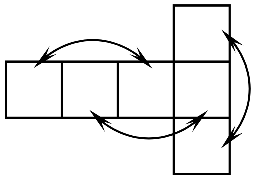
ВОПРОС.

Вы можете сделать обычный игральный кубик, вырезая, складывая и склеивая кусочки картона. Это можно сделать разными способами. Ниже изображены четыре развёртки куба, на которых нанесены очки. Из каких развёрток можно сложить кубик, у которого сумма очков на противоположных сторонах будет равна 7? Обведите слово «Да» или «Нет» в каждой строке следующей таблицы.



Развёртка	Выполняется ли правило: сумма очков на противоположных сторонах кубика равна 7?
I	Да / Нет
II	Да / Нет
III	Да / Нет
IV	Да / Нет

Решение. Соединим противоположные грани кубика на его развёртке стрелками:

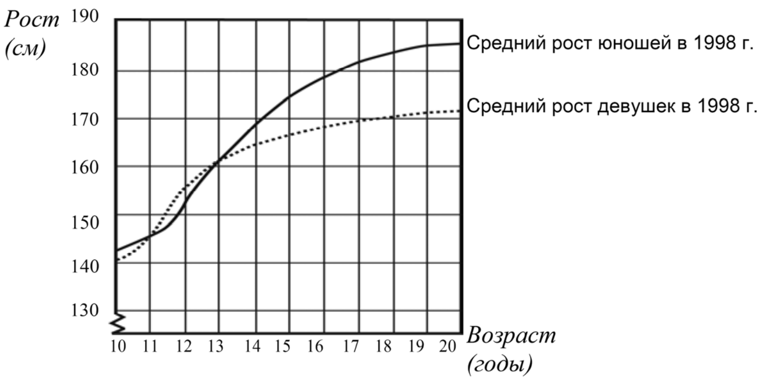


Подсчитаем сумму очков в ячейках, соединённых стрелками. Для первой развёртки: $1+5=6$, $3+4=7$, $2+6=8$; для второй: $4+3=7$, $5+2=7$, $1+6=7$; для третьей: $3+4=7$, $1+6=7$, $5+2=7$; для четвёртой: $1+3=4$, $4+6=10$, $2+5=7$. Правило выполняется только для второй и третьей развёрток.

Ответ: нет, да, да, нет.

16. МОЛОДЁЖЬ СТАНОВИТСЯ ВЫШЕ РОСТОМ

На графике показан средний рост девушек и юношей в Нидерландах в 1998 году.



ВОПРОС 1.

По сравнению с 1980 годом средний рост 20-летних девушек в 1998 году увеличился на 2,3 см и стал равным 170,6 см. Чему был равен средний рост 20-летних девушек в 1980 году?

Решение. Средний рост 20-летних девушек в 1980 году был равен $170{,}6-2{,}3=168{,}3$ см.

Ответ: 168,3 см.

ВОПРОС 2.

Пользуясь графиком, определите, в каком возрасте девушки в среднем выше юношей того же возраста.

Решение. На графике возрастам, когда девушки в среднем выше юношей, соответствует область, в которой пунктирная линия лежит выше сплошной линии. Видно, что это происходит между 11 и 13 годами.

Ответ: 11—13 лет.

ВОПРОС 3.

Объясните, как можно по данному графику определить, что увеличение роста девушек в среднем замедляется после 12 лет.

Решение. За два года с 10 по 12 лет девушки подрастают примерно на 15 см. С 13 по 20 лет — ещё примерно на 12 см. Значит, после 12 лет в среднем они растут медленнее.

Ответ: объяснено.

17. ОБМЕННЫЙ КУРС

Мэй-Линг из Сингапура готовилась в качестве студентки по обмену отправиться на 3 месяца в Южную Африку. Ей нужно было обменять некоторую сумму сингапурских долларов (SGD) на южно-африканские рэнды (ZAR).

ВОПРОС 1.

Мэй-Линг узнала, что обменный курс между сингапурским долларом и южно-африканским рэндом был:

$$1 \text{ SGD} = 4{,}2 \text{ ZAR}.$$

Мэй-Линг обменяла 3000 сингапурских долларов на южно-африканские рэнды по данному обменному курсу. Сколько южно-африканских рэндов получила Мэй-Линг?

Решение. Каждый сингапурский доллар обменивался на 4,2 южно-африканского рэнда. За 3000 сингапурских долларов Мэй-Линг получила $4{,}2 \cdot 3000 = 12600$ южно-африканских рэндов.

Ответ: 12600 ZAR.

ВОПРОС 2.

После возвращения в Сингапур через 3 месяца у Мэй-Линг осталось 3900 ZAR. Она обменяла их снова на сингапурские доллары, обратив внимание на то, что обменный курс изменился следующим образом:

$$1 \text{ SGD} = 4{,}0 \text{ ZAR}.$$

Сколько денег в сингапурских долларах получила Мэй-Линг?

Решение. Теперь каждые 4 южно-африканских рэнда обменивались на один сингапурский доллар. За 3900 южно-африканских рэндов Мэй-Линг получила $3900 : 4{,}0 = 975$ сингапурских долларов.

Ответ: 975 SGD.

ВОПРОС 3.

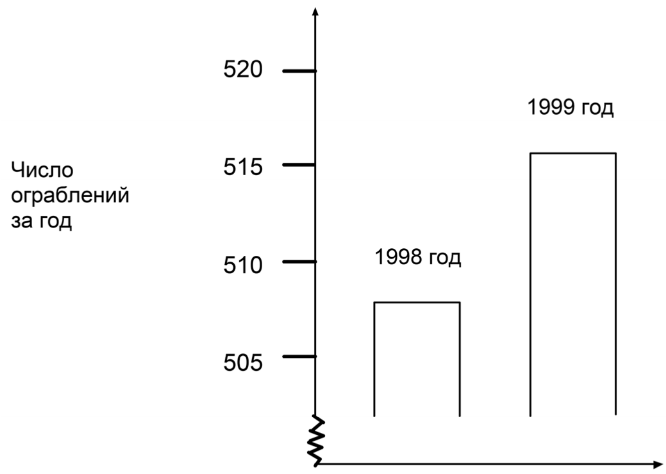
За прошедшие 3 месяца обменный курс изменился, вместо 4,2 стал 4,0 ZAR за 1 SGD. Был ли обменный курс в 4,0 ZAR вместо 4,2 ZAR в пользу Мэй-Линг, когда она снова обменяла южно-африканские рэнды на сингапурские доллары? Запишите объяснение своего ответа.

Решение. Если бы курс остался прежним, то за 3900 ZAR Мэй-Линг получила бы $3900 : 4{,}2 \approx 929$ SGD, что меньше полученных 975 SGD. Обменный курс стал в пользу студентки.

Ответ: да.

18. ОГРАБЛЕНИЯ

В телевизионной передаче журналист показал следующую диаграмму и сказал: «Диаграмма показывает, что по сравнению с 1998 годом в 1999 году резко возросло число ограблений».



ВОПРОС.

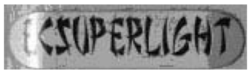
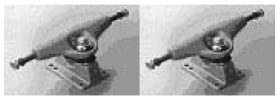
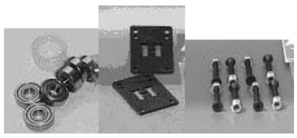
Считаете ли вы, что журналист сделал правильный вывод на основе данной диаграммы? Запишите объяснение своего ответа.

Решение. Из диаграммы видно, что за 1998 год произошло 508 ограблений, а за 1999 год — 516 ограблений. За год число ограблений увеличилось на 8 (примерно на 1,6 %). Говорить о резком росте числа ограблений не уместно. Журналист сделал неправильный вывод.

Ответ: нет.

19. СКЕЙТБОРД

Сергей большой любитель кататься на скейтборде. Он нередко заходит в магазин «Спорт», чтобы выяснить цены на некоторые товары. В этом магазине можно купить полностью собранный скейтборд. Но можно купить платформу, один комплект из 4 колес, один комплект из 2 держателей колес, а также комплект металлических и резиновых составных частей и собрать свой собственный скейтборд. Цены в магазине на эти товары представлены в таблице:

Товар	Цена в зедах (денежная единица)	
Собранный скейтборд	82 или 84	
Платформа	40, 60 или 65	
Один комплект из 4 колёс	14 или 36	
Один комплект из 2 держателей колёс	16	
Один комплект металлических и резиновых деталей скейтборда (подшипники, резиновые прокладки, болты и гайки)	10 или 20	

ВОПРОС 1.

Сергей хочет сам собрать для себя скейтборд. Какую наименьшую цену и какую наибольшую цену можно заплатить в этом магазине за все составные части скейтборда?

Решение. Наименьшая цена складывается из наименьших цен составляющих скейтборда: $40+14+16+10=80$ зедов. Наибольшая цена складывается из наибольших цен составляющих скейтборда: $65+36+16+20=137$ зедов.

Ответ: 80 зедов; 137 зедов.

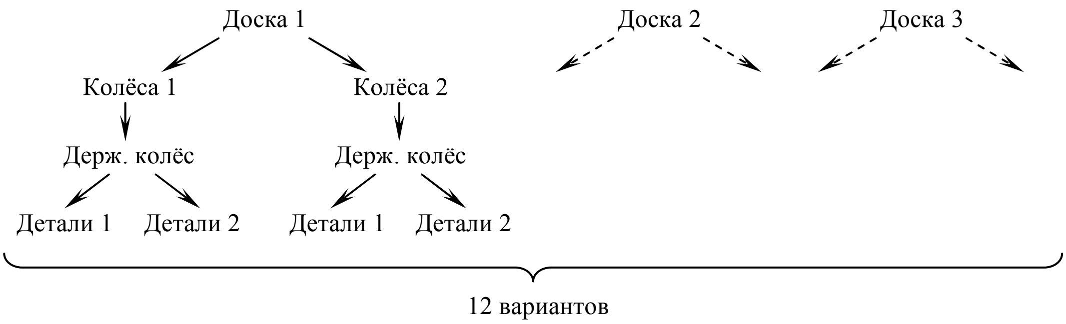
ВОПРОС 2.

В магазине предлагаются на выбор три различных вида досок, два различных комплекта колес, два различных комплекта металлических и резиновых деталей. При этом имеется только один выбор комплекта держателей колес. Сколько различных скейтбордов может собрать Сергей из предлагаемых составных частей?

A. 6 **B.** 8 **C.** 10 **D.** 12

Решение. К каждому из трёх видов платформ можно подобрать два вида колёс. Получается шесть различных комбинаций платформ и колёс. К каждой из этих комбинаций комплект держателей подбирается одним единственным способом. Значит, есть шесть комбинаций платформ, колёс и держателей колёс. К каждой из этих комбинаций комплект деталей подбирается двумя способами. Итого получается двенадцать способов сборки скейтборда.

Изобразим схематично сборку скейтборда:



Правильный ответ: D.

ВОПРОС 3.

У Сергея 120 зедов, и он хочет собрать самый дорогой скейтборд, который может себе позволить на эти деньги. Сколько денег он может истратить на каждую из 4 частей скейтборда?

Решение.

1-*й способ.* Самый дорогой скейтборд стоит 137 зедов. У Сергея только 120 зедов, ему надо сэкономить как минимум 17 зедов. На платформе можно сэкономить либо 5 (что недостаточно), либо 25 зедов, на колёсах — 22, на комплекте деталей — 10 (что тоже недостаточно). В сочетании экономия составляет либо более 22 зедов, либо 15 зедов (что также недостаточно). В итоге, минимальную экономию, составляющую не менее 17 зедов, можно осуществить на колёсах. Самый дорогой скейтборд со стоимостью не более 120 зедов собирается из платформы за 65, колёс за 14, держателей колёс за 16 и комплекта деталей за 20 зедов.

2-*й способ.* Выпишем в таблицу, сколько Сергей может сэкономить на деталях самого дорогого скейтборда.

Деталь скейтборда	**Экономия**
Платформа	5 или 25
Комплект колёс	22
Комплект деталей	10

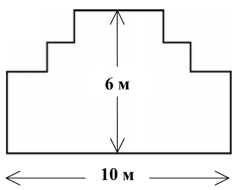
В сочетаниях экономия может составить 5, 10, 15, 22, 25, 27, 32 и более зедов. Наименьшая возможная экономия, большая 17, составляет 22 зеда (экономия на комплекте колёс).

Ответ: 65 зедов на платформу, 14 — на колеса, 16 — на держатели колес, 20 — на комплект деталей.

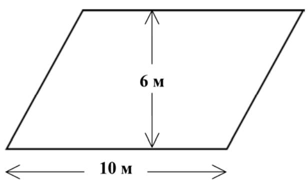
20. САДОВНИК

У садовника имеется 32 м провода, которым он хочет обозначить на земле границу клумбы. Форму клумбы ему надо выбрать из следующих вариантов.

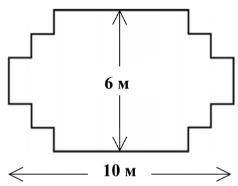
A.



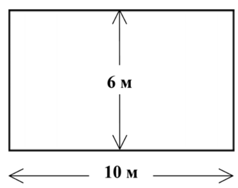
B.



C.



D.

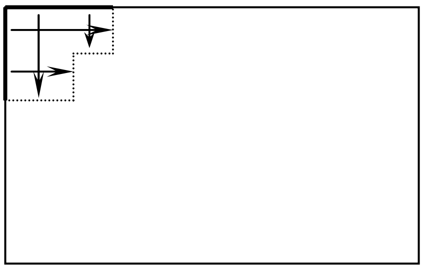


ВОПРОС.

Обведите слово «Да» или «Нет» около каждой формы клумбы в зависимости от того, хватит или не хватит садовнику 32 м провода, чтобы обозначить её границу.

Форма клумбы	Хватит ли 32 м провода, чтобы обозначить границу клумбы?
Форма A	Да / Нет
Форма B	Да / Нет
Форма C	Да / Нет
Форма D	Да / Нет

Решение. Можно заметить, что периметры фигур A, C и D равны 32 м. Действительно, переносом частей без изменения их длины из фигуры D можно получить фигуры A и C (см. рис.). Сумма длин маленьких вертикальных участков даёт большую вертикаль. Аналогично с горизонтальными участками.



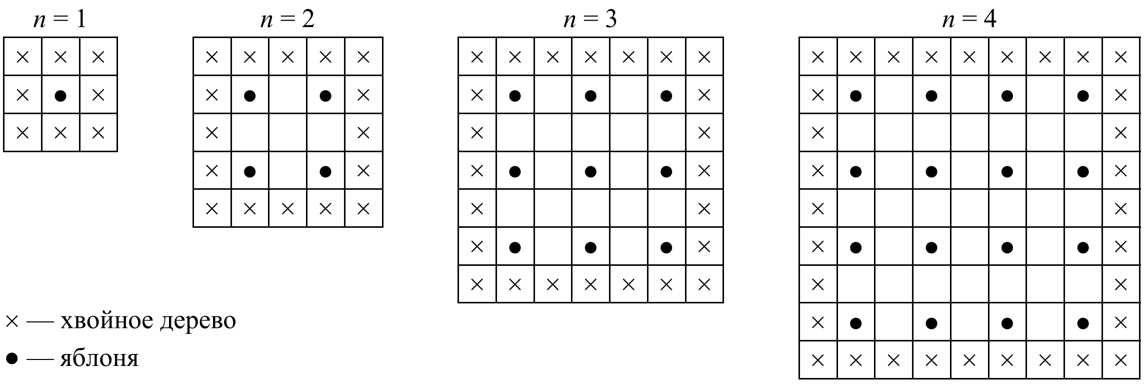
Поскольку высота параллелограмма (фигура B) равна 6 м, то длина его боковой стороны больше 6 м. Значит, сумма длин двух его боковых сторон больше 12 м. И вместе с длинами двух оснований по 10 м получится более 32 м периметра.

Для фигур A, C и D провода хватит, а для фигуры B — нет.

Ответ: да, нет, да, да.

21. ЯБЛОНИ

Фермер на садовом участке высаживает яблони в форме квадрата, как показано на рисунке. Для защиты яблонь от ветра он сажает по краям участка хвойные деревья. Ниже на рисунке изображены схемы посадки яблонь и хвойных деревьев для нескольких значений n, где n — количество рядов высаженных яблонь. Эту последовательность можно продолжить для любого числа n.



× — хвойное дерево

● — яблоня

ВОПРОС 1.

Заполните таблицу:

n	Количество яблонь	Количество хвойных деревьев
1	1	8
2	4	
3		
4		
5		

Решение.

1-*й способ.* Яблони образуют квадрат из n рядов по n деревьев. Значит, всего яблонь n^2. Вдоль каждой боковой стороны участка высажено $2n + 1$ хвойное дерево. При сложении всех четырёх боковых сторон каждое из четырёх угловых деревьев будет посчитано дважды. Значит хвойных деревьев всего $4\cdot(2n+1)-4=8n$.

2-*й способ.* Число хвойных деревьев можно посчитать по-другому. Согласно схеме, между n яблонями садовник оставляет $n-1$ промежуток. Участок внутри хвойных деревьев является квадратом со стороной $n+(n-1)=2n-1$. Длина стороны всего участка вместе с хвойными деревьями составляет $2n+1$. Тогда число хвойных деревьев равно $(2n+1)^2-(2n-1)^2=8n$.

В итоге, таблица выглядит следующим образом:

n	**Количество яблонь**	**Количество хвойных деревьев**
1	1	8
2	4	16
3	9	24
4	16	32
5	25	40

Ответ: см. таблицу.

ВОПРОС 2.

В рассмотренной выше последовательности количество посаженных яблонь и хвойных деревьев подсчитывается следующим образом: количество яблонь = n^2, количество хвойных деревьев = $8n$, где n — число рядов высаженных яблонь. Для какого значения n число яблонь будет равно числу посаженных вокруг них хвойных деревьев?

Решение. Решим уравнение:

$$n^2=8n \Leftrightarrow n(n-8)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=0, \\ n=8. \end{array}\right.$$

По смыслу задачи число рядов яблонь $n > 0$, значит, только при $n = 8$ число яблонь совпадёт с числом хвойных деревьев.

Ответ: 8.

ВОПРОС 3.

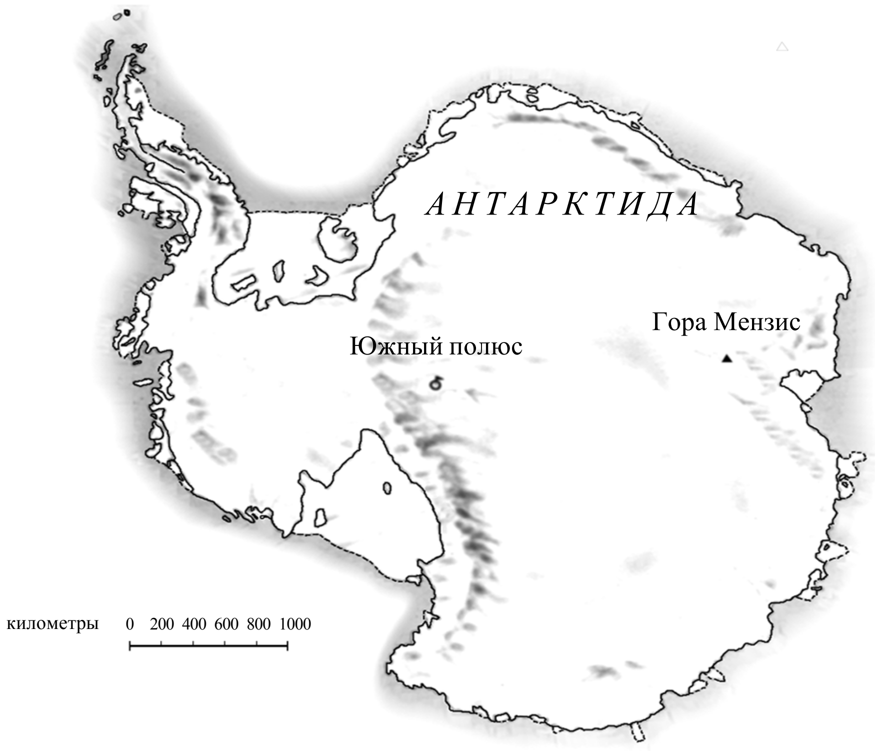
Предположим, что фермер решил постепенно увеличивать число рядов яблонь на своём участке. Что при этом будет увеличиваться быстрее: количество высаживаемых яблонь или количество хвойных деревьев?

Решение. При увеличении на один ряд число хвойных деревьев увеличивается на $8(n+1)-8n=8$, а число яблонь увеличивается на $(n+1)^2-n^2=2n+1$. Видно, что $2n+1>8$ при $n\ge 4$. Начиная с четырёх рядов, при последующем увеличении участка число яблонь увеличивается быстрее числа хвойных деревьев.

Ответ: количество высаживаемых яблонь меньше количества хвойных деревьев при увеличении числа рядов яблонь с одного ряда до четырёх, при дальнейшем увеличении числа рядов яблонь количество высаживаемых яблонь больше количества хвойных деревьев.

22. ПЛОЩАДЬ КОНТИНЕНТА

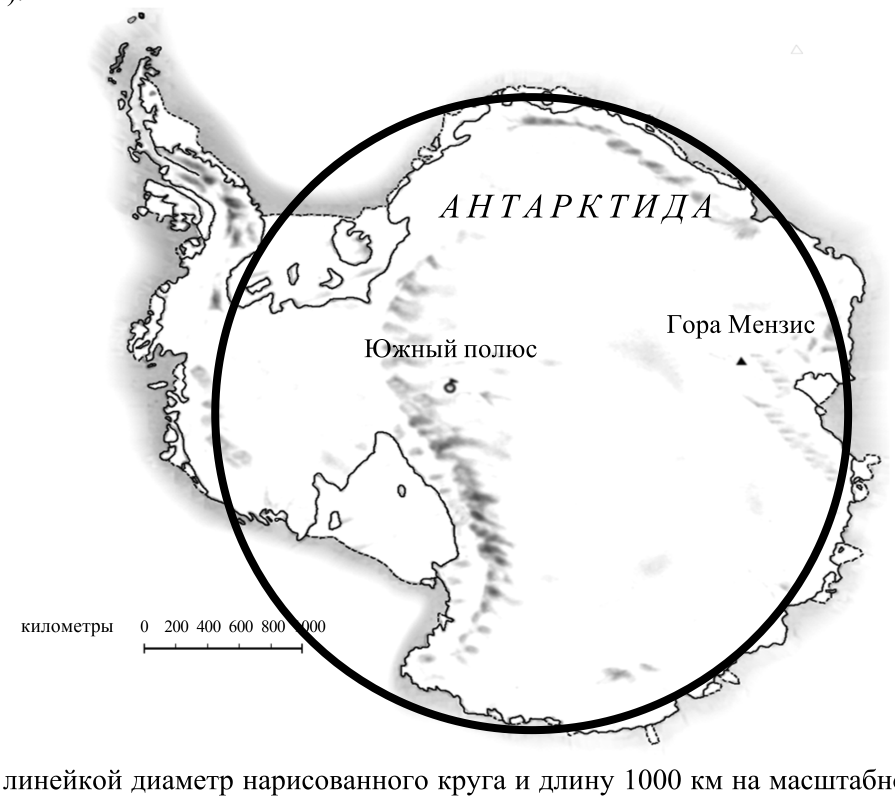
Ниже изображена карта Антарктиды



ВОПРОС.

Пользуясь масштабом данной карты, определите, чему примерно равна площадь Антарктиды.

Решение. Оценим площадь Антарктиды площадью круга, наложенного на континент (см. рисунок).

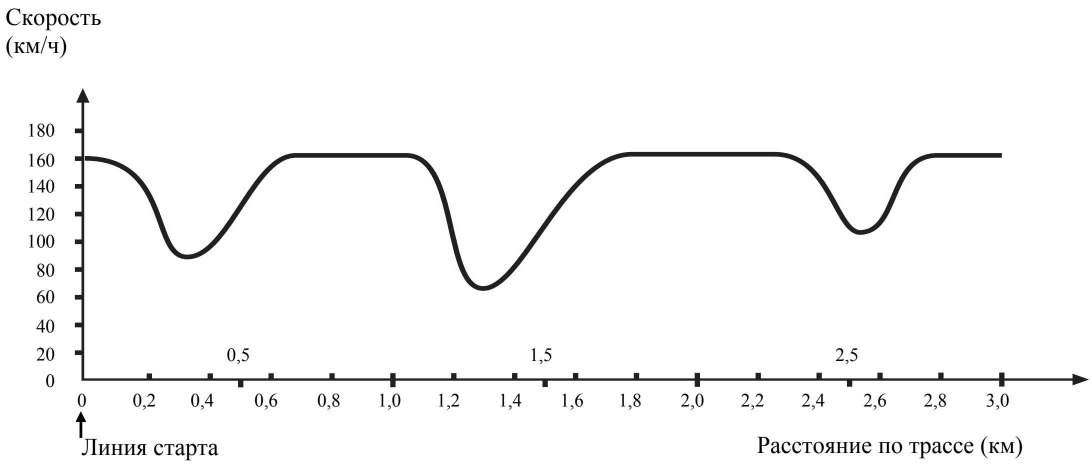


Измерив линейкой диаметр нарисованного круга и длину 1000 км на масштабной линейке и найдя их отношение, определим реальный размер круга. Он составляет 4000 км. Площадь круга равна примерно 12,6 млн кв. км.

Ответ: 12,6 млн кв. км.

23. СКОРОСТЬ ГОНОЧНОЙ МАШИНЫ

На графике показано, как изменялась скорость гоночной машины, когда она проходила второй круг по трёхкилометровой кольцевой трассе без подъёмов и спусков.



ВОПРОС 1.

Чему примерно равно расстояние от линии старта до начала самого длинного прямолинейного участка трассы?

A. 0,5 км **B.** 1,5 км **C.** 2,3 км **D.** 2,6 км

Решение. При выезде на прямолинейный участок трассы машина сначала разгоняется до максимальной скорости, затем продолжает движение с набранной скоростью и в конце участка машина притормаживает, чтобы вписаться в поворот. Причём, чем длиннее прямолинейный участок, тем больше продолжается движение с максимальной скоростью.

Из графика видно, что дольше всего максимальная скорость сохранялась между 1,8 и 2,3 км. Значит, эта часть графика соответствует самому длинному прямолинейному участку трассы, его начало находится в 1,5 км от линии старта.

Правильный ответ: B.

ВОПРОС 2.

В каком месте трассы скорость машины была наименьшей при прохождении второго круга?

A. На линии старта.
B. Примерно на отметке 0,8 км.
C. Примерно на отметке 1,3 км.
D. Примерно посередине трассы.

Решение. Из графика видно, что наименьшая скорость машины при прохождении второго круга, равная 70 км/ч, была примерно на отметке 1,3 км.

Правильный ответ: C.

ВОПРОС 3.

Что можно сказать о скорости машины при прохождении трассы между отметками 2,6 км и 2,8 км?

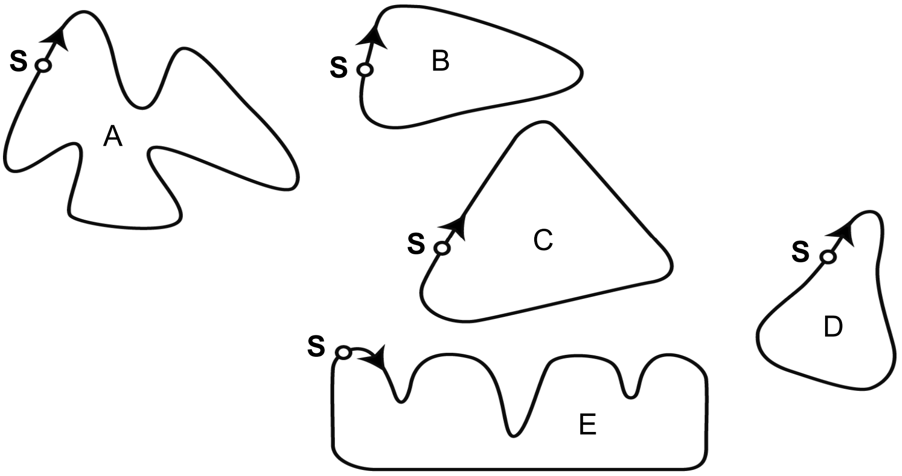
A. Скорость машины оставалась постоянной.
B. Скорость машины увеличивалась.
C. Скорость машины уменьшалась.
D. По данному графику невозможно определить изменение скорости машины.

Решение. Из графика видно, что скорость машины на этом участке увеличивалась со 110 до 160 км/ч.

Правильный ответ: B.

ВОПРОС 4.

Ниже изображены пять различных по форме гоночных трасс:



S — линия старта

По какой из этих трасс ехала гоночная машина, график скорости которой приведён ранее?

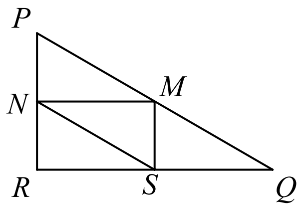
Решение. Судя по графику скорости, трасса содержит три прямолинейных участка: точка старта находится на самом коротком из них, далее идёт средний по длине участок и затем самый длинный. Минимальная скорость у машины между средним и длинным участками, значит, между ними должен быть самый крутой поворот. Данным требованиям удовлетворяет форма трассы B.

Правильный ответ: B.

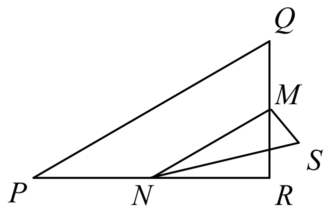
24. ТРЕУГОЛЬНИКИ

Выберите фигуру согласно её описанию. Треугольник *PQR* прямоугольный с прямым углом *R*. Сторона *RQ* меньше стороны *PR*. *M* — середина стороны *PQ* и *N* — середина стороны *QR*. *S* — точка внутри данного треугольника. Отрезок *MN* больше отрезка *MS*.

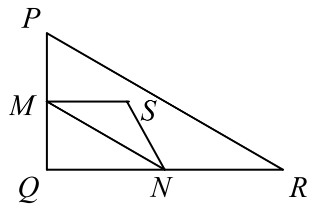
A.



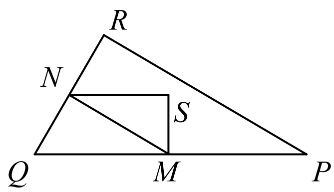
B.



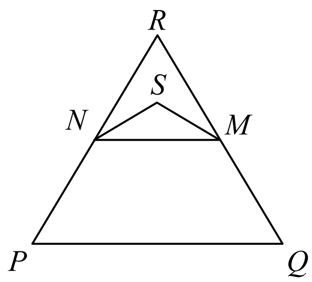
C.



D.



E.

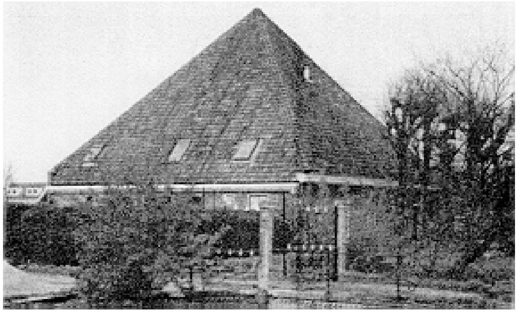


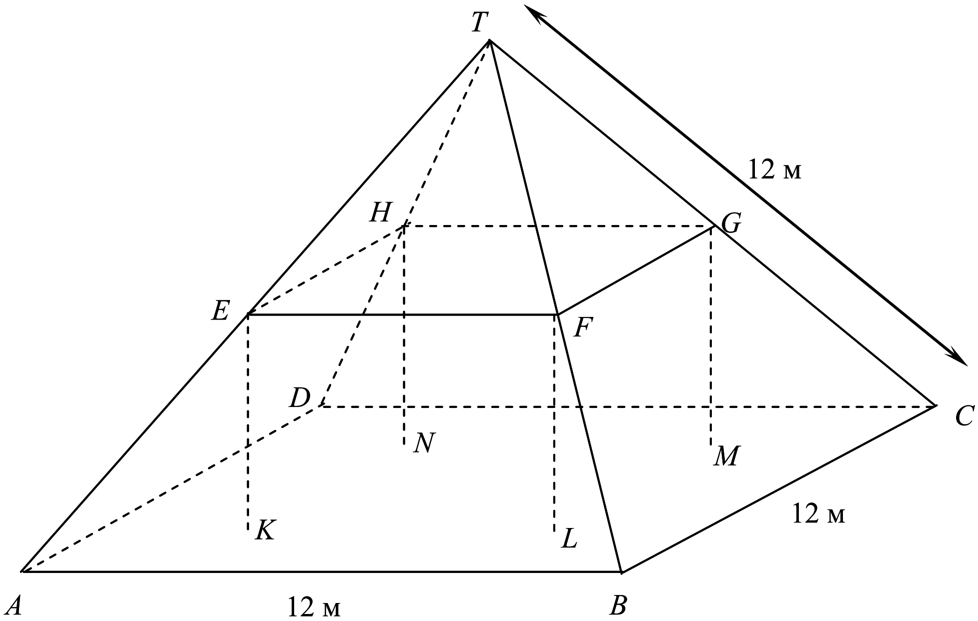
Решение. Фигура A не подходит, поскольку её сторона *RQ* не меньше стороны *PR*. Фигура B не подходит, поскольку её точка *M* не является серединой стороны *PQ*. Фигуры C и E не подходит, поскольку их углы *R* не прямые. Фигура D удовлетворяет всем требованиям.

Правильный ответ: D.

25. ЖИЛОЙ ДОМ

На фотографии виден жилой дом, у которого крыша имеет форму пирамиды. Ниже изображена сделанная учащимся математическая модель крыши дома и указаны длины некоторых отрезков.





На данной модели пол у чердака дома — квадрат *ABCD*. Балки, на которые опирается крыша, являются сторонами бетонного блока, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда *EFGHKLMN*. *E* — середина ребра *AT*, *F* — середина *BT*, *G* — середина *CT*, *H* — середина *DT*. Все ребра пирамиды равны 12 м.

ВОПРОС 1.

Вычислите площадь пола чердака — квадрата *ABCD*.

Решение. Длина стороны квадрата *ABCD* равна 12 м. Значит, площадь квадрата равна $12^2 = 144$ кв. м.

Ответ: 144 кв. м.

ВОПРОС 2.

Найдите длину отрезка *EF* — горизонтальной стороны бетонного блока.

Решение. Поскольку *E* — середина ребра *AT*, а *F* — середина *BT*, значит, *EF* — средняя линия треугольника *ABT*. Поэтому *EF* в 2 раза меньше длины отрезка *AB*: $12:2 = 6$ м.

Ответ: 6 м.